1. Uždavinys

Pirmą trečdalį kelio automobilis važiavo 50 km/h greičiu, o antrą 60 km/h greičiu.

a) Kokiu greičiu turi važiuoti automobilis likusią dalį kelio, kad jo vidutinis greitis visame kelyje būtų lygus 70 km/h?

b) Raskite didžiausią vidutinį greitį visame kelyje (kai pirmą trečdalį kelio automobilis važiavo 50 km/h greičiu, antrą 60 km/h greičiu, o trečią – kiek norima dideliu greičiu).

Galimas sprendimas

Pagal apibrėžimą vidutinis greitis yra $v_{vid} = \frac{S}{t}$, čia S – visas kelias, *t* – judėjimo greitis. Pažymėkime v_3 greitį, kuriuo važiavo automobilis likusią kelio dalį, t.y. *S*/3. Tokiu būdu, bendras automobilio judėjimo laikas bus:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{S}{3 \cdot v_1} + \frac{S}{3 \cdot v_2} + \frac{S}{3 \cdot v_3} \qquad (1)$$

2 balai

Įvertinus (1) gauname

$$v_{vid} = \frac{S}{\frac{S}{3 \cdot v_1} + \frac{S}{3 \cdot v_2} + \frac{S}{3 \cdot v_3}} \qquad (2)$$

2 balai

Iš (2) sąryšio randame v_3

$$v_{vid} = \frac{3 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot v_3}{v_2 \cdot v_3 + v_1 \cdot v_3 + v_1 \cdot v_2} \rightarrow 3 \cdot v_1 \cdot v_2 \cdot v_3 = v_{vid} \cdot (v_2 \cdot v_3 + v_1 \cdot v_3 + v_1 \cdot v_2) \rightarrow$$

$$v_3 = \frac{v_{vid} \cdot v_1 \cdot v_2}{3 \cdot v_1 \cdot v_2 - v_{vid} \cdot v_2 - v_{vid} \cdot v_1} = \frac{70 \cdot 50 \cdot 60}{3 \cdot 50 \cdot 60 - 70 \cdot 60 - 70 \cdot 50} = 162\ km/h \qquad (3)$$

2 balai

Didžiausio vidutinio greičio nustatymui išanalizuokime (2) išraišką. Tarkime paskutinį trečdalį kelio automobilio judėjimo greitis yra begalinis, t.y. $v_3 \rightarrow \infty$ ir narys $\frac{S}{3 \cdot v_3} \rightarrow 0$. Tokiu būdu, didžiausia vidutinio greičio vertė būtų:

$$v_{vid-MAX} = \frac{S}{\frac{S}{3 \cdot v_1} + \frac{S}{3 \cdot v_2} + 0} = \frac{3 \cdot v_1 \cdot v_2}{v_2 + v_1} = \frac{3 \cdot 50 \cdot 60}{50 + 60} \approx 80\ km/h \qquad (4)$$

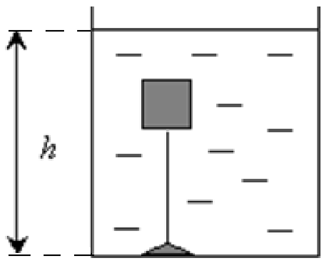
4 balai

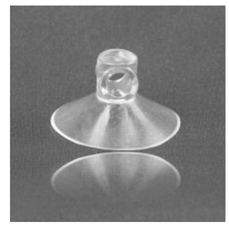
Parodėme, kad jeigu pirmą trečdalį kelio automobilis važiavo 50 km/h greičiu, o antrą 60 km/h greičiu, tai net ir važiuodamas paskutinėje kelio atkarpoje *„šviesos greičiu“* automobilio vidutinis judėjimo greitis visame kelyje neviršys 80 km/h.

Ats.: (a) $162\ km/h$; (b) $80\ km/h$

2 Uždavinys

Koks turi būti mažiausias lipuko plotas, kad išlaikytų 100 *g* kamštinės medžiagos ρ (190 kg/m^3) tašelį (žiūr. pav.)? Vandens aukštis h = 20 *cm*, vandens tankis ρ_0 (1000 kg/m^3), atmosferos slėgis p_a (10^5 Pa), laisvojo kritimo pagreitis yra 9,8 m/s^2.



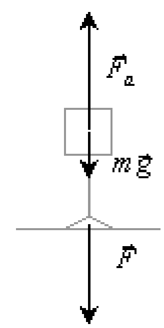


Lipuko pavyzdys.

Sprendimas

Papildomas vandens stulpelio slėgis:

$p_H = \rho_0 gh$; *(1 balas)*



Tuomet slėgis indo dugne:

$p = p_a + \rho_0 gh$; *(1 balas)*

Jėga, kuri veikia lipuką:

$F = (p_a + \rho_0 gh)S$ *(2 balai)*

Kad tašelis būtų po vandeniu jėga *F* turi būti didesnė už Archimedo jėgos ir sunkio jėgos skirtumą:

$F \geq F_A - mg$ *(1 balas)*

Tašelio tūris:

$V = m/\rho$ *(1 balas)*

Archimedo jėga lygi:

$F_A = \rho_0 gV = (\rho_0/\rho)mg$ *(1 balas)*

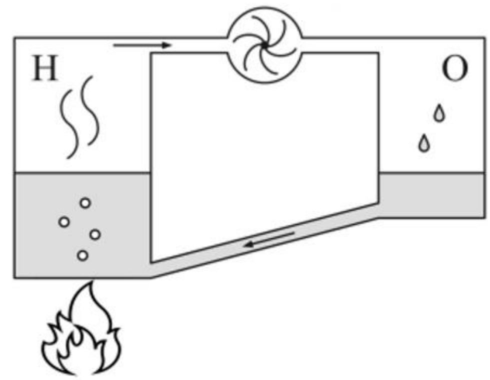
$$(p_a + \rho_0 gh)S \geq (\rho_0/\rho)mg - mg$$
$$S \geq (\rho_0 - \rho)mg/\rho(p_a + \rho_0 gh)$$

$$S = \frac{(\rho_0 - \rho)mg}{\rho(\rho_a + \rho_0 gh)} = \frac{(1000-190)0{,}1\cdot 9{,}8}{190(10^5 + 1000\cdot 9{,}8\cdot 0{,}2)} = 4{,}1 \cdot 10^{-5}\ (m^2)$$ *(3 balai)*

Ats.: $S = 4{,}1 \cdot 10^{-5}\ (m^2)$

3 uždavinys

Atitinkama garo mašina yra sukonstruota taip: kaitintuve *H* vanduo, esant didesniam slėgiui verda esant temperatūrai $T_1 = 120\ ^oC$, karšti šios temperatūros garai suka turbiną, atlikdami darbą. Vėliau šaldytuve *O* garai atvėsta, kondensuojasi ir esant temperatūrai $T_2 = 20\ ^oC$, vanduo vamzdeliu $v = 0{,}5\ m/s$, nuteka atgal į kaitintuvą. Raskite vamzdelio, pro kurį nuteka vanduo, skerspjūvio plotą, jeigu mašinos galia yra $P = 131\ kW$, jos naudingumo koeficientas $\eta = 10\%$. Vandens savitoji šiluma $c = 4200\ J/(kg^oC)$, garavimo šiluma esant $120\ ^oC$ yra lygi $L = 2200\ kJ/kg$. Laikykite, kad vandens srauto tekėjimo greitis pro vamzdelio skerspjūvio plotą yra vienodas.



Sprendimas:

Šiluminės mašinos naudingumo koeficientas nusako atlikto darbo ir išsiskyrusios šilumos santykį, t.y

$\eta = \frac{A}{Q}$ arba $Q = \frac{A}{\eta}$ (1) *(1 balas)*

Naudojant darbo ir galios sąryšį:

$A = Pt$ (2) *(1 balas)*

Ir išsiskyrusios šilumos kiekio formulę:

$Q = cm(T_1 - T_2) + Lm$ (3) *(2 balai)*

Gausime sąryšį tarp šilumos mašinos darbo laiko t ir masės m, per tą laiką įkaitintos iki virimo ir paverstos į garus.

$cm(T_1 - T_2) + Lm = \frac{Pt}{\eta}$ (4) *(1 balas)*

Per laiką *t* vanduo vamzdelyje pajuda atstumą

$h = vt$ (5) *(1 balas)*

Reiškia, kad pro vamzdelio skerspjūvio plotą prateka

$V = Sh$ (6) *(1 balas)*

tūrio vandens, t.y. į kaitintuvą pro vamzdelį grįžta *m* masės vandens:

$m = \varrho V = \varrho Svt$ (7) *(1 balas)*

Įstatę masės (7) išraišką į (4) ir suprastinę laiką, randame vamzdelio skerspjūvio plotą:

$$S = \frac{P}{\eta\rho v(c(T_1 - T_2) + L)} =$$

$$= \frac{131 * 10^3}{0{,}1 * 1000 * 0{,}5(4200(120 - 20) + 2200 * 10^3)} = 0{,}001\ m^2 \qquad (8) \qquad (2\ \text{balai})$$

Atsakymas: S = 10 cm^2

4 Uždavinys

Dviviete baidare plaukia du keliautojai. Jei irkluos tik pirmasis keliautojas, baidarė pasieks krantą 0,5 m/s greičiu, jeigu tik antrasis - 0,7 m/s greičiu. Abu irkluotojai irkluoja pastoviomis jėgomis. Kokiu greičiu baidarė pasieks krantą, jeigu jie irkluotų kartu? Visais atvejais baidarės nuplaukia tą patį atstumą, o jų pradinis greitis lygus 0. Vandens pasipriešinimo jėgos nepaisyti.

Duota:

m – baidarės ir irkluotojų masė

$v_1 = 0{,}5$ m/s

$v_2 = 0{,}7$ m/s

S - atstumas iki kranto

F_1 – pirmo irkluotojo naudojama jėga

F_2 – antro irkluotojo naudojama jėga

Rasti v=?

Sprendimas

Norint pasiekti krantą pirmasis irkluotojas turi atlikti darbą $A_1 = F_1 S$, o tam jis turi įgyti kinetinę energiją $\frac{mv_1^2}{2}$, todėl

$$\frac{mv_1^2}{2} = F_1 S \qquad (1)$$ *(1 balas)*

Norint pasiekti krantą antrasis irkluotojas turi atlikti darbą $A_2 = F_2 S$, o tam jis turi įgyti kinetinę energiją $\frac{mv_2^2}{2}$, todėl

$$\frac{mv_2^2}{2} = F_2 S \qquad (2)$$ *(1 balas)*

Irkluodami kartu jų jėgos sumuosis. Tuomet reikalinga kinetinė energija pasiekti krantą yra $\frac{mv^2}{2}$.

$$\frac{mv^2}{2} = (F_1 + F_2)S \qquad (3)$$ *(2 balai)*

Iš (1) ir (2) lygties išsireiškiame F_1 ir F_2 ir statome į (3) lygtį.

$$\frac{mv^2}{2} = \left(\frac{mv_1^2}{2S} + \frac{mv_2^2}{2S}\right)S \qquad (4)$$ *(2 balai)*

Suprastinę S, padauginę iš 2, ir padaline iš m gauname tokią išraišką

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2$$, tuomet *(2 balai)*

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{0{,}5^2 + 0{,}7^2} = 0{,}86\ m/s$$ *(2 balai)*

Ats.: baidarė pasieks krantą $0{,}86\ m/s$ greičiu.

5 uždavinys

Domas pagamino dvi matematines svyruokles ir paleido svyruoti. Per tą patį laiką viena iš jų atliko 50 svyravimų, o kita 30. Kokie šių svyruoklių ilgiai, jei viena iš svyruoklių yra 32 cm trumpesnė už kitą?

Sprendimas:

Duota:
$t_1 = t_2 = t$ abiejų svyruoklių svyravimo laikas;
$N_1 = 50$ – pirmos svyruoklės svyravimų skaičius per laiką t;
$N_2 = 30$ – antros svyruoklės svyravimų skaičius per laiką t;
l_1; l_2 – matematinių svyruoklių ilgiai;
Pagal įsivestus žymėjimus, antroji svyruoklė yra ilgesnė $l_2 = l_1 + 0{,}32$; *nes susvyruoja mažiau kartų per tą patį laiką.* (*2 balai*)

Rasti:
l_1 ir l_2

Žinant laiką, per kurį įvyko tam tikras svyravimų skaičius, galima įvertinti svyravimo periodus abiem svyruoklėms:

$T_1 = t/N_1$ ir $T_2 = t/N_2$ (*1 balas*)

Matematinei svyruoklei periodą galima skaičiuoti pagal:

$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$ *ir* $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$ (*1 balas*)

Sulyginam periodus pirmai ir antrai svyruoklėms:

$\frac{t}{N_1} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$ ir $\frac{t}{N_2} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$ (*1 balas*)

Laikas t yra abiem svyruoklėms vienodas, todėl jį išreiškus, galima lygtis sulyginti, o vietoje l_2 įsistatyti (l_1 + 0,32):

$$N_1 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} = N_2 2\pi\sqrt{\frac{l_1 + 0{,}32}{g}} \quad \rightarrow$$ (*2 balai*)

$$50\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 30\sqrt{\frac{l_1 + 0{,}32}{g}} \quad \rightarrow$$

$$2500 \cdot l_1 = 900 \cdot (l_1 + 0{,}32) \quad \rightarrow$$

$$1600 \cdot l_1 = 288 \quad \rightarrow$$

$$l_1 = 0{,}18\ m;$$
$$l_2 = 0{,}50\ m;$$

(*2 balai*)
(*1 balas*)

----

tarkime <u>antroji</u> svyruoklė yra <u>trumpesnė</u> $l_2 = l_1$ - 0,32;
Taikome analogišką sprendimą:

$$50\sqrt{\frac{l_1}{g}} = 30\sqrt{\frac{l_1 - 0{,}32}{g}}$$
$$2500 \cdot l_1 = 900 \cdot (l_1 - 0{,}32)$$
$$1600 \cdot l_1 = -288$$

$$l_1 = -0{,}18\ m \text{ (gaunasi ilgis neigiamas)}$$

Ats.: antroji matematinė svyruoklė yra ilgesnė ir lygi 0,50 m, o pirmoji 0,18 m.

Trumpesnė svyruoklė susvyruoja daugiau kartų (50) per tą patį laiką, nei ilgesnė (30).